



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

06F

D

دوپینگ ماز

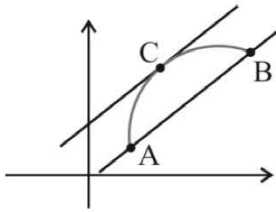
آزمون دوپینگ ماز - ۱۴۰۰/۰۳/۵

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراح سؤال	ویراستاران
نیما نیکنام	سید جواد نظری
	ارسلان حسونند
	میلاد حسینی نامی



۱- با توجه به نمودار چه تعداد از موارد زیر صحیح است؟

الف) m_C (شیب مماس در C) m_{AB} (شیب خط AB)

ب) $m_A > m_C > m_B$ (شیب مماس بر تابع در A)

پ) به ازای تمام نقاط روی تابع شیب مماس مثبت است.

۳ (۴)

۲ (۳)

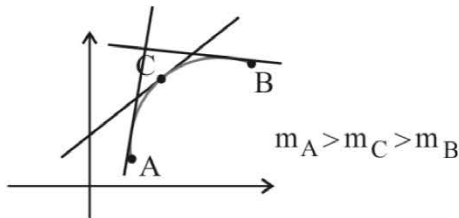
۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

موارد الف و ب صحیح است.

نکته: در تابعی که نمودار آنها به صورت $\cup$ یا $\cap$ با حرکت از چپ به راست، شیب خط مماس بزرگتر می شود و در تابعی که نمودار آنها به صورت $\cap$ یا $\cup$ با حرکت از چپ به راست، شیب خط مماس کوچکتر می شود. واضح است که $m_{AB} = m_C$



همین طور واضح است که شیب مماس در A مثبت است، ولی شیب در B منفی است. پس مورد پ غلط است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} & x \geq 2 \\ ax^2 + bx + 1 & x < 2 \end{cases} \quad \text{تابع}$$

در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است، a کدام است؟

-۰/۵ (۴)

۰/۵ (۳)

۲/۵ (۲)

-۲/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

این تابع تنها در $x=2$ ممکن است، مشتق پذیر نباشد، بنابراین ترتیبی می دهیم که تابع در $x=2$ مشتق پذیر باشد. به این منظور اولاً باید تابع در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق های چپ و راست تابع در این نقطه باید با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right) = 5 \quad \text{حد راست:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + bx + 1) = 4a + 2b + 1 \quad \text{حد چپ:}$$

$$f(2) = 5 \quad \text{مقدار:}$$

$$(4a + 2b + 1 = 5 \Rightarrow 4a + 2b = 4) \quad \Leftarrow \text{پیوستگی}$$

$$f'_-(x) = 2ax + b \Rightarrow f'_-(2) = 4a + b$$

$$f'_+(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'_+(2) = -3$$

$$(4a + b = -3) \quad \Leftarrow \text{برابری مشتق چپ و راست}$$

از طرفی:



از حل دستگاه زیر a را می‌یابیم.

$$\begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 4a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow b = 7 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

دقت کنید، برای مشتق گرفتن از تابع هموگرافیک از فرمول زیر استفاده کنید:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x > a \\ k & x = a \\ h(x) & x < a \end{cases}$$

در تابع $x = a$ دو شرط زیر را داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = k$$

اولاً:

$$g'_+(a) = h'_-(a)$$

ثانیاً:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$$

۳- در تابع

(۴) هر مقدار a

(۳) وجود ندارد

(۲) -۱

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۲

در توابع به صورت $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq x_0 \\ a & x = x_0 \end{cases}$ اگر تابع g (با دامنه $x \neq x_0$) مشتق پذیر باشد، برای این که تابع f مشتق پذیر باشد، کافی است داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$$

دقت کنید:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2, \quad (x \neq 1)$$

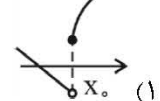
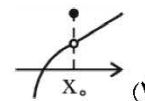
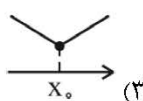
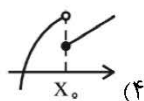
که تابعی مشتق پذیر است.

بنابراین:

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1$$

مثلاً: اگر تابع به صورت $h(x) = \begin{cases} |x-1| & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ بود تابع در $x = 1$ مشتق ناپذیر بود، زیرا $y = |x-1|$ در $x = 1$ مشتق ناپذیر است.

۴- نمودار کدام تابع در $x = x_0$ مشتق راست دارد، ولی مشتق چپ ندارد؟



پاسخ: گزینه ۴



دقت کنید به دنبال تابعی هستیم که از راست پیوسته باشد و شیب نیم مماس راست بی نهایت نباشد.
(دقت کنید در گزینه ۱ با وجود اینکه تابع از راست پیوسته است ولی چون شیب خط مماس بی نهایت است، مشتق راست نداریم).
در گزینه ۳ تابع هر دو مشتق چپ و راست را دارد ولی برابر نیستند.
و در گزینه ۲ به دلیل ناپیوستگی تابع از چپ و راست، نه مشتق راست داریم و نه مشتق چپ.

۵- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$ نمودار مشتق تابع f کدام است؟



پاسخ: گزینه ۱

دقت کنید تابع در $x=1$ پیوسته نیست، پس در $x=1$ مشتق ندارد، با وجود اینکه حد چپ و راست تابع مشتق در $x=1$ برابر است.

تابع مشتق f به صورت روبه‌روست $f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و نمودار آن گزینه ۱ است.

۶- تعداد نقاط مشتق ناپذیری تابع $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4| & 0 \leq x \\ \sqrt[3]{x^2 - 9} & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا به سراغ ضابطه‌ها می‌رویم.

$y = |x^2 - 4|$ در $x=2$ و $x=-2$ مشتق ناپذیر است که با توجه به دامنه ($0 \leq x$) $x=2$ قابل قبول است.

$y = \sqrt[3]{x^2 - 9}$ در $x=3$ و $x=-3$ مشتق ناپذیر است که با توجه به دامنه ($x < 0$) $x=-3$ قابل قبول است.

حالا نوبت محل دو ضابطه‌ای شده یعنی $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x^2 - 4| = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^2 - 9} = \sqrt[3]{-9}$$

و $f(0) = 4$ پس در $x=0$ هم به دلیل ناپیوستگی مشتق نداریم، پس کلاً در سه نقطه به طول‌های $2, 0, -3$ مشتق نداریم.

دقت کنید توابع به صورت $y = |g(x)|$ در ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق (یگانه)، یعنی ریشه‌هایی که در تجزیه به صورت $(x-\alpha)$ ظاهر شوند، به دلیل نابرابری مشتق چپ و راست، مشتق ندارد.

و توابع به صورت $y = \sqrt[n]{g(x)}$ در ریشه‌هایی از $g(x)$ که مرتبه تکرار آنها از فرجه کمتر است، به دلیل نامتناهی شدن مشتق، مشتق ندارد.

اگر در تجزیه $g(x)$ عامل $(x-\alpha)^m$ دیده شود، m را مرتبه تکرار $x=\alpha$ می‌گوییم.

اگر g در $x=\alpha$ تغییر علامت ندهد، نمودار تابع در همسایگی $x=\alpha$ به صورت $\cup$ (به شرطی که علامت تابع اطراف $x=\alpha$ مثبت باشد) یا $\cap$ (به شرطی که علامت تابع اطراف $x=\alpha$ منفی باشد) است.

و اگر تابع در $x=\alpha$ از چپ به راست از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، نمودار تابع به صورت $\cup$ و اگر از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، نمودار تابع به صورت $\cap$ می‌باشد.



به عنوان مثال:

$$y = \sqrt[3]{|x|}$$

در $x = 0$ مشتق ناپذیرند و:

$$y = \sqrt[3]{x^5} = x \sqrt[3]{x^2}$$

در $x = 0$ مشتق پذیرند.

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

$$y = \sqrt[3]{x^4} = x \sqrt[3]{x}$$

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$y = \sqrt[3]{x^3} = x$$

۷- کدام گزینه در $x = 0$ مشتق ناپذیر است؟

(۴) $y = x[-x]$

(۳) $y = x^2[x]$

(۲) $y = x[-x^2]$

(۱) $y = [|x|]$

پاسخ: گزینه ۴

نکته: دقت کنید تابع $f(x) = [g(x)]$ در $x = \alpha$ که به ازای آن $g(\alpha)$ عددی صحیح است، ممکن است ناپیوسته و مشتق ناپذیر باشد؛ در این صورت حالت‌های زیر را داریم:

(۱) اگر g در همسایگی $x = \alpha$ اکیداً صعودی باشد، نمودار f در همسایگی $x = \alpha$ به صورت $\text{—} \bullet \text{—}$ می‌باشد و مقدار تابع f برابر حد راست تابع است و حد چپ تابع یک واحد کمتر از مقدار تابع است. پس f در $x = \alpha$ پیوستگی راست دارد و بنابراین مشتق راست دارد.

(۲) اگر g در همسایگی $x = \alpha$ اکیداً نزولی باشد، نمودار f در همسایگی $x = \alpha$ به صورت $\text{—} \bullet \text{—}$ و مقدار تابع برابر حد چپ آن و حد راست تابع یک واحد کمتر از مقدار تابع است. پس f در $x = \alpha$ پیوستگی چپ دارد و بنابراین مشتق چپ دارد.

(۳) اگر g در $x = \alpha$ دارای ماکزیمم نسبی به صورت $\wedge$ یا $\vee$ باشد، نمودار f در همسایگی $x = \alpha$ به صورت $\text{—} \bullet \text{—}$ می‌باشد و در این حالت f در $x = \alpha$ حد دارد و این حد یک واحد کمتر از مقدار تابع است. پس f در $x = \alpha$ از چپ و راست ناپیوسته است و مشتق چپ و راست ندارد.

(۴) اگر g در $x = \alpha$ دارای مینیمم نسبی به صورت $\vee$ یا $\wedge$ باشد، نمودار تابع f در همسایگی $x = \alpha$ به صورت $\text{—} \bullet \text{—}$ می‌باشد و در این حالت f در $x = \alpha$ پیوسته و مشتق پذیر است و مشتق آن برابر صفر است.

بنابراین $y = [|x|]$ در $x = 0$ پیوسته و مشتق پذیر است و مشتق آن در $x = 0$ برابر صفر است.

نکته: دقت کنید اگر تابع $y = g(x)$ در همسایگی $x = \alpha$ تعریف شده باشد ولی حد چپ و راست نابرابر داشته باشد:

$$f(x) = (x - \alpha)g(x) \text{ در } x = \alpha \text{ حد دارد و پیوسته است ولی مشتق ناپذیر است.}$$

$$\text{زیرا } f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(x - \alpha)g(x)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) \text{ وجود ندارد}$$

بنابراین $y = x[-x]$ در $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

نکته: اگر $y = g(x)$ در $x = \alpha$ حد داشته باشد و مقدار تابع موجود باشد ولی با حد آن نابرابر باشد، تابع $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ در $x = \alpha$ مشتق پذیر است.

$$\text{زیرا } f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(x - \alpha)g(x)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) \text{ موجود است}$$

بنابراین $y = x[-x^2]$ در $x = 0$ مشتق پذیر است و مشتق آن برابر (-1) است.

$$\text{زیرا: } \lim_{x \rightarrow 0} [-x^2] = -1$$



نکته: دقت کنید اگر تابع $y = g(x)$ در همسایگی $x = \alpha$ تعریف شده باشد ولی حد چپ و راست نابرابر داشته باشد، تابع $f(x) = (x - \alpha)^2 g(x)$ در $x = \alpha$ مشتق پذیر است و $f'(\alpha) = 0$.

$$(f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(x - \alpha)^2 g(x)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} (x - \alpha) g(x) = 0 \text{ زیرا})$$

خلاصه اگر $y = g(x)$ در همسایگی $x = \alpha$ تعریف شود ولی حد نداشته باشد (به دلیل نابرابری حد چپ و راست) با ضرب یک عامل صفر تابع حاصل پیوسته است و مشتق ناپذیر و با ضرب دو عامل صفر تابع حاصل مشتق پذیر می شود.

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \text{ مثلاً تابع } x = 0 \text{ در } x = 0 \text{ حد ندارد و نمودار آن به صورت } \rightarrow \text{ است.}$$

$$x \text{ sign}(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ و تابع } x = 0 \text{ در } x = 0 \text{ حد دارد و پیوسته است ولی مشتق ناپذیر است و نمودار آن به صورت } \rightarrow \text{ است.}$$

$$x^2 \text{ sign}(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \text{ و تابع } x = 0 \text{ در } x = 0 \text{ مشتق پذیر است و نمودار آن به صورت } \rightarrow \text{ است.}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & 1 < x \\ 3x + 1 & -2 < x \leq 1 \\ \sqrt{x+2} & x \leq -2 \end{cases} \text{ تابع } -8 \text{ در کدام بازه مشتق پذیر است؟}$$

$$[-5, -2] \quad (1) \quad [1, 6] \quad (2) \quad [0, 3] \quad (3) \quad [-5, -2] \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

دقت کنید تابع در $x = 1$ پیوسته است و مشتق راست آن موجود و متناهی است و در بازه $(1, \infty)$ مشتق پذیر است، پس در $[1, 6]$ هم مشتق پذیر است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 3x = 4, \quad f(1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x + 1 = 4$$

$$f'_+(1) = (x^2 + 3x)'_{x=1} = (2x + 3)_{x=1} = 5$$

از طرفی تابع در $x = 1$ مشتق چپ و راست نابرابر دارد، پس در هر بازه‌ای شامل $x = 1$ مشتق ناپذیر است.

$$f'_-(1) = (3x + 1)'_{x=1} = 3 \neq f'_+(1) = 5$$

بنابراین گزینه ۳ غلط است از طرفی تابع در $x = -2$ از راست ناپیوسته است، پس مشتق راست ندارد و گزینه ۱ هم غلط است.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (3x + 1) = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \sqrt{x+2} = 0, \quad f(-2) = 0$$

تابع در $x = -2$ مشتق چپ نامتناهی دارد.

پس گزینه ۴ هم غلط است.



دقت کنید:

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\sqrt[3]{x+2} - 0}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} = +\infty$$

۹- در کدام تابع دامنه f' و دامنه f یکی است؟

$$y = \frac{1}{x} \quad (۴)$$

$$y = [x] \quad (۳)$$

$$y = \sqrt{x} \quad (۲)$$

$$y = \sqrt[3]{x} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

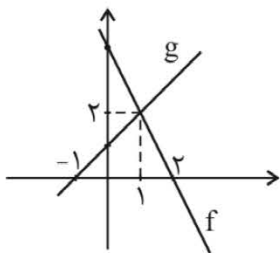
(۱) تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ به دلیل نامتناهی شدن مشتق، مشتق ندارد. پس $D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\}$ ولی $D_f = \mathbb{R}$. دقت کنید، این تابع در $x = 0$ خط مماس دارد (مماس قائم دارد) ولی مشتق ندارد.

(۲) تابع $y = \sqrt{x}$ در $x = 0$ به دلیل نامتناهی شدن مشتق راست، مشتق راست ندارد و به دلیل ناپیوستگی از چپ مشتق ندارد پس $D_{f'} = (0, \infty)$ ولی $D_f = [0, \infty)$.

(۳) تابع $y = [x]$ در اعداد صحیح ناپیوسته است، بنابراین در این اعداد مشتق ندارد و $D_{f'} = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ولی $D_f = \mathbb{R}$.

(۴) تابع $y = \frac{1}{x}$ تنها در $x = 0$ به دلیل ناپیوستگی (تعریف نشدن) مشتق ندارد و $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\}$.

۱۰- اگر نمودار f و g مطابق شکل زیر باشد، مشتق تابع $h(x) = f(x)g(x)$ را در نقطه $x = 3$ کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۶

(۳) -۶

(۴) -۱۰

پاسخ: گزینه ۴

$$h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$h'(3) = f'(3)g(3) + g'(3)f(3)$$

بنابراین:

حال، با توجه به این که f و g توابع خطی هستند، مشتق این توابع برابر شیب خط می‌باشد. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$f'(3) = -2, \quad g'(3) = 1$$

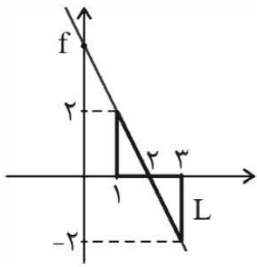
و برای محاسبه مقادیر توابع f و g می‌توان از قضیه تالس استفاده کرد یا معادله خط را نوشت. شیب f و g را که داریم با صدق دادن $(1, 2)$ در معادله آنها داریم $f(x) = -2x + 4$ و $g(x) = x + 1$.

پس $f(3) = -2$ و $g(3) = 4$ بنابراین:

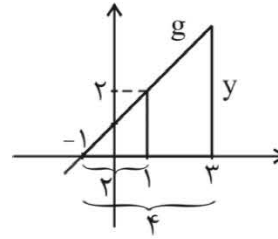
$$h'(3) = -2 \times 4 + 1 \times (-2) = -10$$



اینجوری هم می‌تونید از تالس و تشابه استفاده کنید:



$$L = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{L} = \frac{1}{1}$$

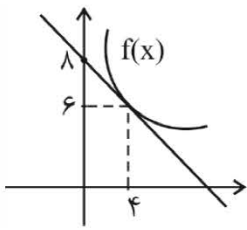


پس: $f(3) = -2$

$$\frac{2}{4} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = 4$$

پس: $g(3) = 4$

۱۱- اگر قسمتی از نمودار تابع f شبیه شکل زیر باشد، آنگاه مشتق تابع $g(x) = xf(x^2)$ در $x=2$ کدام است؟



(۱) -2

(۲) 2

(۳) -10

(۴) 10

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به نمودار، خطی با شیب $m = \frac{8-6}{-4} = -\frac{1}{4}$ بر تابع در نقطه‌ای به طول ۴ مماس است، پس $f'(4) = -\frac{1}{4}$ و عرض نقطه تماس برابر ۶ است پس $f(4) = 6$ از طرفی:

$$g'(x) = f(x^2) + 2xf'(x^2)x = f(x^2) + 2x^2f'(x^2)$$

$$(uw)' = u'w + w'u \quad \text{(مشتق ضرب)}$$

$$((f(u))' = u'f'(u) \quad \text{(مشتق ترکیب)}$$

بنابراین:

$$g'(2) = f(4) + 8 \times f'(4)$$

$$g'(2) = 6 + 8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 6 - 2 = 4$$

۱۲- اگر $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{3x-1}{x-2}\right)^2}$ ، حاصل $f'(3)$ برابر کدام است؟

(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) $-\frac{7}{3}$

(۲) $-\frac{5}{3}$

(۱) $-\frac{20}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = \left(\frac{3x-1}{x-2}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{3x-1}{x-2}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{-5}{(x-2)^2}\right)$$

$$f'(3) = \frac{2}{3} (8)^{-\frac{1}{3}} (-5) = -\frac{5}{3}$$

دقت کنید مشتق (u^n) برابر $(nu^{n-1}u')$ است، بنابراین:



برای مشتق گرفتن از تابع $\frac{3x-1}{x-2}$ هم می‌توانیم از فرمول مشتق تقسیم استفاده کنیم.

$$\left(\frac{u}{w}\right)' = \frac{u'w - w'u}{w^2}$$

و هم از فرمول مشتق تابع هموگرافیک:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

۱۳- اگر $f(x) = 3x - |x| + 2$ و $g(x) = |x| + 3x$ حاصل $g'(0) \times f'(g(0))$ برابر کدام است؟

(۴) وجود ندارد

(۳) ۸

(۲) ۱۱

(۱) ۴

پاسخ: گزینه ۳

$$\xrightarrow{x>0} g(x) = 4x \rightarrow f(g(x)) = 12x - 4x + 2 = 8x + 2$$

$$\xrightarrow{x\leq 0} g(x) = 2x \rightarrow f(g(x)) = 6x + 2x + 2 = 8x + 2$$

و با توجه به این که $g'(0) \times f'(g(0)) = (fog)'(0)$ پس $g'(0) \times f'(g(0)) = 8$.

۱۴- در تابع $f(x) = |x^2 - 6x|$ حاصل $f'_-(0) + f'(7) + f'_+(1) + f'_+(6)$ برابر کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۱۲

(۲) ۱۰

(۱) ۴

پاسخ: گزینه ۳

$$f'_+(6) = -f'_-(0)$$

پس تنها کافی است $f'(7)$ و $f'_-(1)$ را محاسبه کنیم از طرفی چون تابع داخل قدرمطلق به ازای $x=7$ مثبت است و $(x^2 - 6x) = 2x - 6$ بنابراین $f'(7) = 8$ و چون تابع داخل قدرمطلق به ازای $x=1$ منفی است و $(-x^2 + 6x)' = -2x + 6$ بنابراین $f'_-(1) = 4$ و $8 + 4 = 12$ جواب است.

دقت کنید نمودار تابع نسبت به $x=3$ متقارن است بنابراین مشتق در هر دو نقطه‌ای که فاصله‌شان تا $x=3$ یکی است، قرینه است مثلاً $f'_-(9) = f'(-3)$ و با توجه به شکل $f'_+(6) = f'_-(0)$ و $f'_-(6) = f'_+(0)$ و همان‌طور که قبلاً در آزمون تعیین سطح دیدیم $f'_-(6) = f'_-(0)$ و $-f'_+(6) = -f'_-(0)$

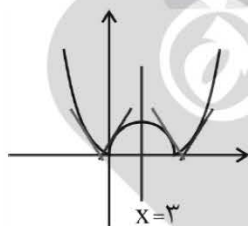
$$-f'_+(6) = -f'_-(0) \Rightarrow -(-6^+) = (-6)^-$$

$$-(-6^+) = 6^-$$

صفر و ۶ نسبت به $x=3$ قرینه‌اند از طرفی: $(x^2 - 6x)' = 2x - 6$

$$f'_+(6) = f'_-(0) = |6| = 6 \text{ پس}$$

$$f'_-(6) = f'_-(0) = -|6| = -6 \text{ و}$$



۱۵- حجم آبی که درون یک ظرف است، پس از گذشت زمان t از رابطه $V = 100 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست می‌آید. در کدام لحظه آهنگ

لحظه‌ای حجم آب با آهنگ تغییر متوسط آن در بازه زمانی $[0, 50]$ برابر می‌باشد؟

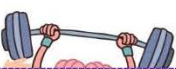
(۴) $t = 30$

(۳) $t = 25$

(۲) $t = 20$

(۱) $t = 15$

پاسخ: گزینه ۳



نکته: در توابع درجه دو آهنگ لحظه‌ای در وسط بازه با آهنگ متوسط برابر است. یعنی:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (f \text{ درجه دو})$$

روش دیگر برای حل این است که معادله $f'(t) = \frac{f(5.0)-f(0)}{5.0-0}$ را حل کنیم و t را بیابیم و در واقع، اگر تابع درجه ۲ نبود باید این کار را انجام می‌دادیم.

۱۶- معادله مکان یک اتومبیل برحسب زمان پس از ترمز کردن از رابطه $S(t) = -2t^2 + 20t$ به‌دست می‌آید، چقدر طول می‌کشد اتومبیل متوقف شود و در زمان ترمز کردن سرعت آن چقدر بوده؟

(۱) ۵ ثانیه - ۱۰ متر بر ثانیه (۲) ۴ ثانیه - ۲۰ متر بر ثانیه (۳) ۵ ثانیه - ۲۰ متر بر ثانیه (۴) ۴ ثانیه - ۱۰ متر بر ثانیه

پاسخ: گزینه ۳

اولاً جواب $S'(t) = 0$ زمانی است که طول می‌کشد اتومبیل متوقف شود، یعنی: $S'(t) = -4t + 20 = 0 \Rightarrow t = 5$
(دقت کنید اگر $S(t)$ معادله مکان باشد $S'(t)$ معادله سرعت است و $S'(t) = 0$ یعنی زمانی که سرعت صفر است و متحرک متوقف شده است).
ثانیاً سرعت در لحظه ترمز کردن برابر $S'(0)$ است، زیرا در زمان $t = 0$ اتومبیل ترمز کرده است.
از طرفی: $S'(t) = -4t + 20 \Rightarrow S'(0) = 20$.

۱۷- مکان یک متحرک در زمان‌های مختلف در جدول زیر آمده است کدام گزینه تقریب صحیحی برای سرعت لحظه‌ای در لحظه $t = 3$ نمی‌باشد؟

t	۱	۲	۳	۴
f(t)	۵	۶	۸	۷

۲ (۲)

-۱ (۱)

۲/۵ (۴)

۰/۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \xrightarrow[t=3]{h=1} f'(3) = \frac{f(4)-f(3)}{1} = -1$$

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t)-f(t-h)}{h} \xrightarrow[t=3]{h=1} f'(3) = \frac{f(3)-f(2)}{1} = 2$$

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h} \xrightarrow[t=3]{h=1} f'(3) = \frac{f(4)-f(2)}{2} = 0.5$$

بنابراین در هیچ یک از سه روش برای $f'(3)$ مقدار تقریبی $2/5$ به‌دست نیامده است.

۱۸- کدام تابع اکیداً یکنواست؟

$$y = |x-2| + x \quad (۴)$$

$$y = |x| + \sqrt{x-1} \quad (۳)$$

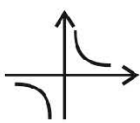
$$y = [x] \quad (۲)$$

$$y = \frac{1}{x} \quad (۱)$$

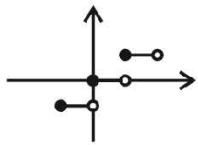
پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۱ به دلیل داشتن ریشه مخرج که تابع در اطراف آن مثبت و منفی بی‌نهایت می‌شود، غیریکنواست.

نمودار $y = \frac{1}{x}$ هم این موضوع را نشان می‌دهد.



گزینه ۲: تابع $y = [x]$ یکنواست ولی اکیداً یکنوا نیست، هم از روی نمودار تابع مشخص است، هم چون به ازای مثلاً $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ ، y های یکسانی دارد.



گزینه ۳: اکیداً صعودی است با دامنه $x \geq 1$ و $|x| = x$ و تابع مجموع دو تابع اکیداً صعودی است که خود اکیداً صعودی است، مشتق آن هم این را تأیید می‌کند.

$$y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

(دقت کنید اگر دامنه این تابع شامل صفر بود، اکیداً یکنوا نبود، مثلاً $y = |x| + \sqrt{x+1}$ غیر یکنواست).

گزینه ۴: تابع به ازای $x \leq 2$ ثابت است، پس اکیداً یکنوا نیست.

$$y = |x-2| + x = \begin{cases} 2x-2 & x > 2 \\ 2 & x \leq 2 \end{cases}$$

۱۹- تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 1$ در بازه (a, b) نزولی است، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

باید بازه‌ای را بیابیم که در آن $f'(x) < 0$ باشد از طرفی:

$$f'(x) = x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5$$

با توجه به جدول تعیین علامت f' ، بازه مورد نظر $(1, 5)$ است.

و طول بازه $5 - 1 = 4$ است.

x	$-\infty$	۱	۵	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

دقت کنید در توابع مشتق‌پذیر، هر کجا $f' \geq 0$ باشد تابع صعودی است و هر کجا $f' \leq 0$ باشد تابع نزولی است.

۲۰- اگر تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x}$ در بازه (a, ∞) نزولی باشد، کمترین مقدار a کدام است؟

-۱ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول:

باید مشتق تابع f را بگیریم و ببینیم در چه بازه‌ای منفی است. برای مشتق گرفتن از f دو راه داریم راه اول استفاده از مشتق تقسیم:

$$\left(\frac{u}{w}\right)' = \frac{u'w - w'u}{w^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x) - (x^2-2x+3)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-6x+6}{(x^2-2x)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$



روش دوم: از مشتق هموگرافیک استفاده کنیم:

$$\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)' = \frac{(ad-bc)}{(cu+d)^2} u'$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x^2-2x)^2} (2x-2) = 0 \Rightarrow x=1$$

x	0	1	2
f'	+	+	-
f	↗	↗	↘

بنابراین کمترین مقدار a عدد ۲ بوده است:

اگر $a=1$ را انتخاب کنیم تابع در بازه $(1, \infty)$ غیریکنواست. (تابع در $x=2$ ناپیوسته است و در هر بازه‌ای که شامل صفر و ۲ باشد غیریکنواست). البته با کمی دقت نیازی به مشتق گرفتن هم نیست، تابع در بازه‌ای که ریشه مخرج و اکسترمم آن در آن نباشد یکنواست (البته ریشه مخرجی که تابع در همسایگی آن نامتناهی شود) و با توجه به این که $x=0$ و $x=2$ ریشه‌های مخرج هستند، باید بازه $(2, \infty)$ را انتخاب کنیم، زیرا در صورت انتخاب سایر گزینه‌ها عدد ۲ در بازه هست.

$$2 \in (-1, \infty), 2 \in (1, \infty), 2 \in (0, \infty)$$

$$21- \text{حدود } a \text{ کدام باشد تا تابع } f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & 1 < x \\ ax+2 & x \leq 1 \end{cases} \text{ اکیدا نزولی باشد؟}$$

$$a \leq -2 \quad (4)$$

$$-2 \leq a < 0 \quad (3)$$

$$-2 < a < 0 \quad (2)$$

$$a < 0 \quad (1)$$

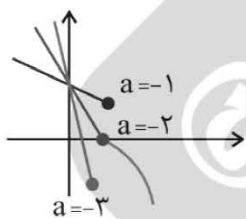
پاسخ: گزینه ۳

روش اول: اولاً باید هر یک از ضابطه‌ها اکیدا نزولی باشند، $1-x^2$ به ازای $(1 < x)$ اکیدا نزولی است هم از روی شکل مشخص است و هم مشتق آن یعنی $(-2x)$ به ازای $(1 < x)$ منفی است. حال، برای این که $ax+2$ نیز اکیدا نزولی باشد، باید $a < 0$ باشد، از طرفی باید در محل دو ضابطه‌ای شدن یعنی $x=1$ نیز داشته باشیم: $(f(1) \geq f(1^+))$ تا تابع اکیدا نزولی باشد، بنابراین:

$$a+2 \geq 0 \Rightarrow a \geq -2$$

پس باید $-2 \leq a < 0$ تا تابع اکیدا نزولی باشد.

روش دوم: می‌توانستیم از اختلاف گزینه‌ها استفاده کنیم. به این ترتیب که عددی که در ۲ گزینه بود و در ۲ گزینه نبود را انتخاب کنیم (مثلاً $a=-3$) و به ازای آن تابع را رسم کنیم و با درست یا غلط بودن آن عدد گزینه‌های شامل آن را نگاه داریم یا رد کنیم. (در این‌جا چون به ازای $a=-3$ شکل اکیدا نزولی نیست گزینه‌های ۱ و ۴ حذف می‌شوند)



سپس بین گزینه‌های باقی‌مانده عدد دیگری را انتخاب کنیم که در یکی باشد و در دیگری نباشد (مثلاً $a=-2$) تا در نهایت با امتحان آن تنها یک گزینه باقی بماند. (به ازای $a=-2$ نمودار اکیدا نزولی است پس گزینه ۳ جواب است).

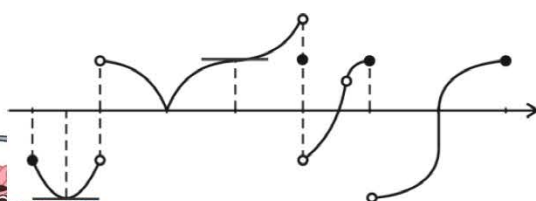
۲۲- تعداد نقاط بحرانی تابع زیر کدام است؟

$$7 \quad (1)$$

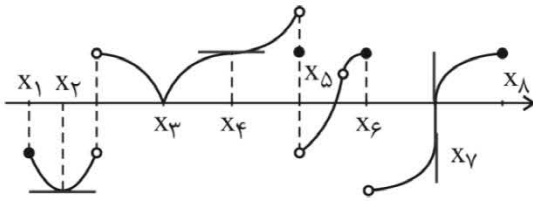
$$8 \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

$$9 \quad (4)$$



پاسخ: گزینه ۲



تابع دارای ۸ نقطه بحرانی است.

x_1 : ابتدای بازه بسته (ابتدای دامنه که تابع در آن تعریف شده).

x_2 : به دلیل صفر بودن مشتق (افقی بودن خط مماس).

x_3 : به دلیل موجود نبودن $f'(x_3)$ (مشتق چپ و راست در این نقطه نابرابر است، نیم‌مماس چپ و راست در یک امتداد نیست).

x_4 : به دلیل صفر بودن مشتق (افقی بودن خط مماس).

x_5 : به دلیل موجود نبودن $f'(x_5)$ (تابع در این نقطه ناپیوسته است).

x_6 : به دلیل موجود نبودن $f'(x_6)$ (تابع در این نقطه ناپیوسته است).

x_7 : به دلیل موجود نبودن $f'(x_7)$ (تابع در این نقطه مماس قائم دارد).

x_8 : انتهای بازه بسته (انتهای دامنه که تابع در آن تعریف شده).

دقت کنید نقطه $B(x_B, y_B)$ را نقطه بحرانی تابع گوییم، هرگاه اولاً تابع در آن تعریف شود $x_B \in D_f$ ($f(x_B) = y_B$) ثانیاً مشتق در این نقطه یا برابر صفر باشد ($f'(x_B) = 0$) یا موجود نباشد.

با توجه به تعریف فوق نقاطی که تابع در آن ناپیوسته است ولی در آن تعریف نمی‌شود، جزء نقاط بحرانی نمی‌باشند. مثلاً: برای $y = \frac{1}{x}$ بحرانی نیست (در دامنه تابع نیست).

دقت کنید از بین این ۸ نقطه بحرانی تنها x_2, x_3, x_4 طول اکسترم‌های نسبی می‌باشند و x_1 و x_7 طول max نسبی هستند.

در واقع هر نقطه اکسترم نسبی حتماً بحرانی هست ولی هر بحرانی اکسترم نسبی نیست.

۲۲- اگر نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + 1$ دارای دو نقطه بحرانی و یک اکسترم نسبی باشد. a کدام است؟

- ± 4 (۱) ± 2 (۲) $\pm \frac{4}{3}$ (۳) $\pm \frac{8}{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 4x$$

و معادله $f'(x) = 0$ باید دو ریشه داشته باشد که یکی از ریشه‌ها، ریشه ساده (طول اکسترم نسبی) و ریشه دیگر ریشه مضاعف است (نقطه بحرانی که اکسترم نیست).

$$f'(x) = x(4x^2 + 3ax + 4) \Rightarrow x = 0, 4x^2 + 3ax + 4 = 0$$

$$\Delta = 9a^2 - 64 = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{8}{3}$$

دقت کنید تابع در همسایگی نقطه بحرانی که مشتق در آن صفر است ولی اکسترم نیست به شکل $\cup$ یا $\cap$ است.



۲۴- چه تعداد از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) هر اکسترمم نسبی حتماً بحرانی هم هست.

ب) اگر $x=c$ طول اکسترمم نسبی تابع f باشد آنگاه $f'(c)=0$ است.

پ) اگر $x=c$ طول اکسترمم نسبی تابع باشد آنگاه تابع در یک همسایگی $x=c$ تعریف شده است.

ت) اگر تابع در یک نقطه خط مماس داشته باشد، آنگاه تابع در آن نقطه مشتق دارد.

ث) اگر تابع در دو طرف اکسترمم مطلق خود تعریف شود، آن اکسترمم مطلق، نسبی هم هست.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

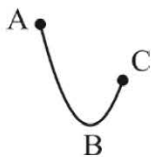
الف) درست است، زیرا در هر اکسترمم نسبی یا مشتق صفر است یا مشتق وجود ندارد، درست مثل یک نقطه بحرانی.

ب) غلط است، مثلاً در تابع $y=|x|$ در واقع اگر تابع مشتق‌پذیر باشد و $x=c$ طول اکسترمم نسبی آن باشد $f'(c)=0$ است.

پ) درست است، زیرا تابع باید دو طرف اکسترمم نسبی خود تعریف شود.

ت) غلط است، مثلاً $y=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ خط مماس دارد ولی مشتق ندارد.

ث) درست است، به عنوان مثال در شکل زیر A ماکزیمم مطلق است ولی نسبی نیست، زیرا تابع سمت چپ A تعریف نشده است ولی B هم مینیمم مطلق است و هم مینیمم نسبی چون هم پایین‌ترین نقطه تابع است هم نسبت به دو طرف خود پایین‌تر است. راستی نقطه C هم فقط بحرانی و اکسترمم نسبی و مطلق نیست.



۲۵- کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=x-[x]$ درست است؟

(۲) ماکزیمم دارد و مینیمم ندارد.

(۱) ماکزیمم و مینیمم دارد.

(۴) ماکزیمم ندارد و مینیمم دارد.

(۳) ماکزیمم و مینیمم ندارد.

پاسخ: گزینه ۲



با توجه به نمودار تابع ماکزیمم دارد و مینیمم ندارد.

دقت کنید با توجه به شرایط تابع سه نوع اکسترمم داریم:

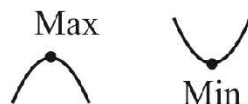
(۱) نقاط بحرانی ناپیوسته که یا از روی نمودار و یا با مقایسه مقدار تابع در آن نقطه و اطرافش می‌توان نوع اکسترمم را تشخیص داد.

فقط می‌توانند			Max
اکسترمم مطلق شوند.			Min

(۲) نقاط بحرانی پیوسته مشتق‌ناپذیر

$f'>0$	$f'<0$	$f'>0$	$f'<0$	Max
$f'<0$	$f'>0$	$f'<0$	$f'>0$	Min

(۳) توابع مشتق‌پذیر



در این توابع مختصات اکسترمم در تابع صدق می‌کند و طول نقطه، مشتق را صفر می‌کند.
در تمامی اکسترمم‌ها اگر تابع دو طرف اکسترمم تعریف شود آن اکسترمم نسبی هم هست و اگر هیچ نقطه تابع از آن بالاتر نباشد max مطلق است.
و اگر هیچ نقطه تابع از آن پایین‌تر نباشد min مطلق است.
در سؤال فوق ماکزیمم هم مطلق است و هم نسبی است.
در ضمن تمامی نقاط تابع ثابت هم بحرانی هستند و هم ماکزیمم نسبی و مطلق هستند و هم مینیمم نسبی و مطلق هستند.

۲۶- اگر $A(2, 1)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ باشد، $a+b$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) -۴

پاسخ: گزینه ۱

باید اولاً:

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + 4a + 2b + 1 = 1$$

$$4a + 2b = -8 \Rightarrow 2a + b = -4$$

ثانیاً:

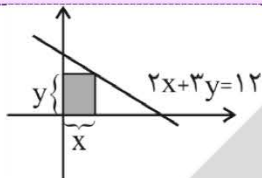
$$\left. \begin{aligned} f'(2) &= 0 \\ f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12 + 4a + b = 0$$

$$\begin{cases} 2a + b = -4 \\ 4a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow 2a = -8 \Rightarrow a = -4, b = 4 \Rightarrow a + b = -4 + 4 = 0$$

۲۷- بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن روی محورهای مختصات و یک رأس آن روی خط $2x + 3y = 12$ است کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳



روش اول:

$$2x + 3y = 12 \Rightarrow y = \frac{12 - 2x}{3}$$

$$S = xy \Rightarrow S = x \left(\frac{12 - 2x}{3} \right) = \frac{12x - 2x^2}{3}$$

$$S' = \frac{12 - 4x}{3} = 0 \Rightarrow x = 3, S(3) = 6$$

روش دوم: اگر $ax + by = L$ و بخواهیم $S = kxy$ اکسترمم شود، باید $\frac{L}{xy} = ax + by$ باشد.

بنابراین $2x = 3y = 6$ پس $x = 3, y = 2$ و $\max(S) = 2 \times 3 = 6$



دقت کنید در تمام مسائل بهینه‌سازی قرار است کمیتی را اکسترمم نماییم، این کمیت تابع ما است.

(در این مثال تابع مساحت مستطیل است)

که عموماً دو متغیره است، حال ما باید به کمک یک رابطه (یک معادله که در آن ارتباط متغیرها مشخص شدن، در این مثال معادله $2x + 3y = 12$ است) یک متغیر را برحسب دیگری مشخص کنیم.

$$\left(y = \frac{12 - 2x}{3} \right)$$

و در تابع قرار دهیم تا تابع جدیدی بسازیم که یک متغیره است.

$$S(x) = x \left(\frac{12 - 2x}{3} \right) = \frac{12x - 2x^2}{3}$$

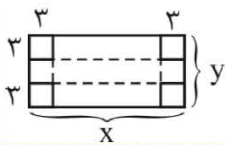
و در نهایت با مشتق گرفتن و حل معادله مشتق برابر صفر، نقاط بحرانی آن را مشخص کنیم.

$$\left(S'(x) = \frac{12 - 4x}{3} = 0 \Rightarrow x = 3 \right)$$

و با محاسبه مقدار تابع در آن نقطه بحرانی مقدار اکسترمم تابع را می‌یابیم.

دقت کنید اگر بیش از یک نقطه بحرانی داشتیم، برای مشخص کردن نوع اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) احتیاج به جدول تغییرات داریم و اگر تنها یک نقطه بحرانی داشته باشیم، حتماً این نقطه بحرانی طول همان اکسترمم مورد نظر است.

۲۸- می‌خواهیم از ۴ گوشه مستطیلی به ابعاد x, y که مساحت آن ۱۰۰ سانتی متر مربع است ۴ مربع به ضلع ۳ واحد جدا کنیم تا با تا کردن اضلاع مطابق شکل یک مکعب مستطیل بسازیم اگر بخواهیم حجم جعبه ماکزیمم باشد $x + y$ چقدر است؟



۲۰ (۲)
۵۲ (۴)

۲۵ (۱)
۲۹ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

$$xy = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}, \quad V = 3(x-6)(y-6)$$

$$V = 3(x-6)\left(\frac{100}{x} - 6\right) = 3\left(136 - 6x - \frac{600}{x}\right)$$

$$V' = 3\left(-6 + \frac{600}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{600}{6} = 100 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow x + y = 20$$

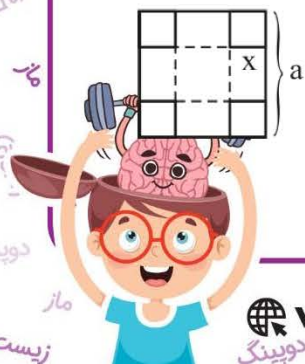
روش دوم:

هرگاه در تساوی که شامل متغیرها است ($xy = 100$) و تابعی که قرار است اکسترمم شود ($V = 3(x-6)(y-6)$) نام متغیرها را عوض کنیم و تغییری ایجاد نشود، حالت خاص (بحرانی) زمانی است که متغیرها با هم برابر باشند. در این صورت $x = y = 10$ و $x + y = 20$.

۲۹- می‌خواهیم با یک صفحه مربع شکل به طول ضلع a مطابق شکل با برداشتن ۴ مربع از ۴ گوشه آن یک جعبه در باز بسازیم. ضلع مربع‌های کوچک کدام باشد تا حجم جعبه ماکزیمم باشد؟

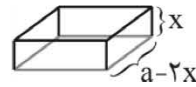
$\frac{a}{6}$ (۲)
 $\frac{a}{2}$ (۴)

$\frac{a}{5}$ (۱)
 $\frac{a}{4}$ (۳)



پاسخ: گزینه ۲

حجم جعبه برابر مساحت قاعده ضرب در ارتفاع است یعنی:



$$V = (a - 2x)^2 \times x$$

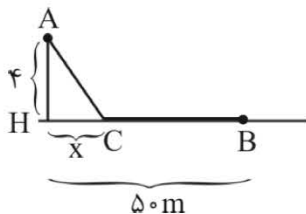
$$V' = 2(-2)(a - 2x)x + (a - 2x)^2 = 0$$

$$(a - 2x)(-4x + a - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{6} \end{cases}$$

دقت کنید به ازای $x = \frac{a}{6}$ حجم جعبه صفر می شود.

($x = \frac{a}{6}$ طول min است) و به ازای $x = \frac{a}{6}$ حجم ماکزیمم می شود.

۳۰- مطابق شکل می خواهیم از نقطه A جاده ای به نقطه B بکشیم. اگر سرعت پیشروی جاده در مسیر AC، $\frac{1}{5}$ متر در روز و سرعت پیشروی جاده در مسیر CB $\frac{2}{5}$ متر در روز باشد، CH برابر کدام باشد تا جاده زودتر تمام شود؟



۲ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به رابطه $x = Vt$ داریم: $t = \frac{x}{V}$ از طرفی:

$$AC = \sqrt{x^2 + 16}, \quad CB = 50 - x$$

بنابراین:

$$t_1 = \frac{AC}{V_1} = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{1/5}, \quad t_2 = \frac{CB}{V_2} = \frac{50 - x}{2/5}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{1/5} + \frac{50 - x}{2/5}$$

(زمان کل برابر زمان ساخت جاده AC بعلاوه زمان ساخت جاده CB).

$$t' = \frac{1}{1/5} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \right) - \frac{1}{2/5} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 + 16} = \left(\frac{1/5}{2/5} \right)^2$$

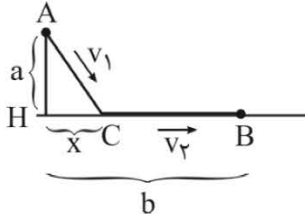
$$\frac{x^2}{x^2 + 16} = \frac{9}{25} \Rightarrow 25x^2 = 9x^2 + 9 \times 16 \Rightarrow 16x^2 = 9 \times 16$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$



میانبر:

در حل این نوع سؤالات مقدار x را از رابطه $\frac{x^2}{x^2 + a^2} = \frac{V_1^2}{V_2^2}$ به دست آورید، دقت کنید $V_1 > V_2$ و a طول AH است. همین طور که می بینید x به طول BH بستگی ندارد.



© All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or by any information storage and retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

